



Lisbon School
of Economics
& Management
Universidade de Lisboa

A decorative graphic at the top of the slide consists of a blue line graph with several data points, some of which are highlighted with colored circles (green, blue, yellow). The background is a solid teal color.

Estatística II

Licenciatura em Gestão do Desporto
2.º Ano/2.º Semestre
2024/2025

Aulas Teórico-Práticas N.º 16 e 17 (Semana 9)

Docente: Elisabete Fernandes

E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt



<https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao>



<https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/>

Conteúdos Programáticos

Aulas Teórico-Práticas (Semanas 1 a 3)

- **Capítulo 1:** Revisões e Distribuições de Amostragem

Aulas Teórico-Práticas (Semanas 4 a 7)

- **Capítulo 2:** Estimação

Aulas Teórico-Práticas (Semanas 7 a 9)

- **Capítulo 3:** Testes de Hipóteses

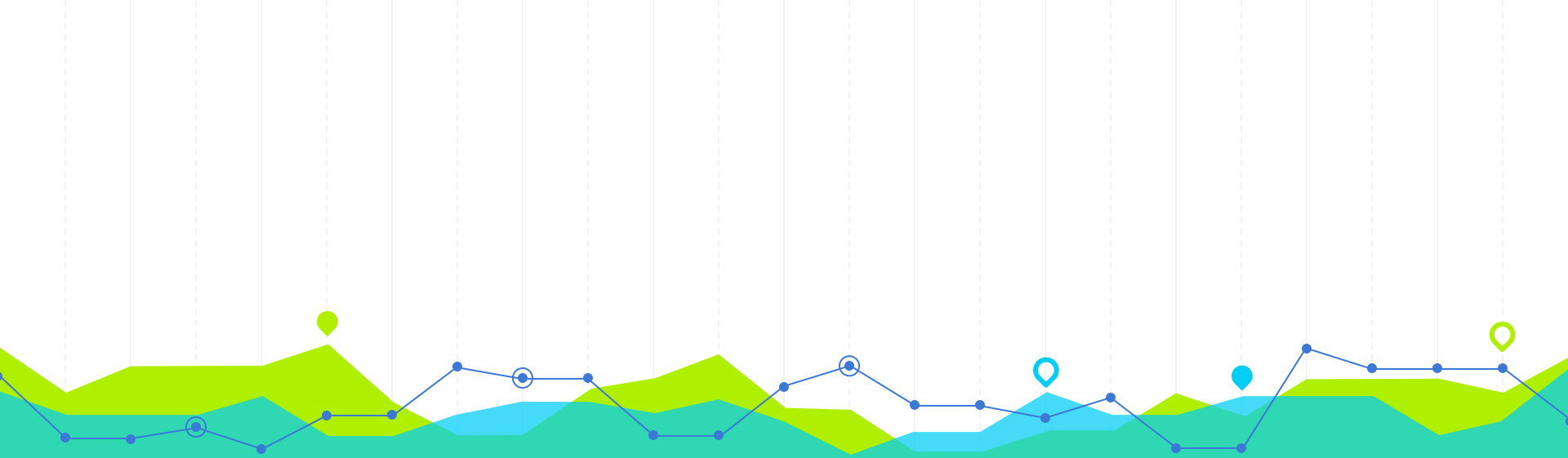
Aulas Teórico-Práticas (Semanas 10 a 13)

- **Capítulo 4:** Modelo de Regressão Linear Múltipla

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

<https://cas.iseg.ulisboa.pt>



Inferência Estatística

Definição e Construção de Testes de Hipóteses

1

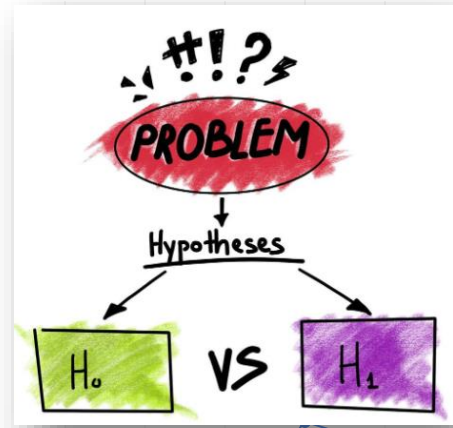
Teste de Hipóteses

- ✓ Procedimento que conduz a uma tomada de decisão, com base na informação fornecida pelos dados recolhidos, sobre a aceitação ou a não aceitação de determinada **hipótese estatística** que se coloca sobre uma ou mais populações.

“A **Statistical Test** is a way to evaluate the evidence the data provides against a hypothesis. This hypothesis is called **the null hypothesis (H₀)**. H₀ is usually opposed to a hypothesis called the **alternative hypothesis (H₁)**.”

If the data does not provide enough evidence against H₀, H₀ is not rejected. If instead, the data shows strong evidence against H₀, H₀ is rejected and H₁ is considered as true with a quantified (low) risk of being wrong.

A **Statistical Test** allows to reject/not to reject H₀.”



Hipótese é uma afirmação

Em uma certa população as médias de tempo de recuperação dos indivíduos que tomam um certo remédio e daqueles que não tomam são iguais

O teste de hipótese é uma pergunta

Será que em uma certa população as médias de tempo de recuperação dos indivíduos que tomam um certo remédio e daqueles que não tomam são iguais?

O resultado do teste é uma resposta

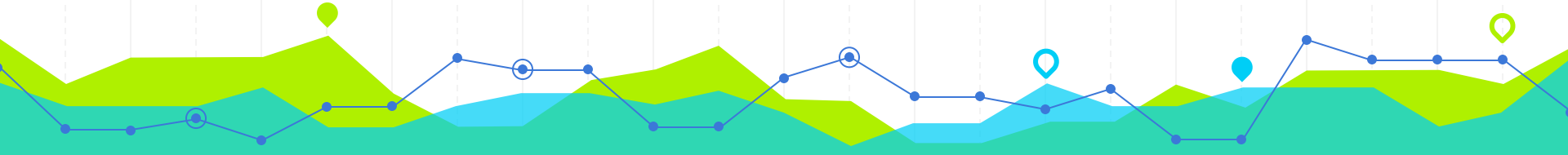
Com base na amostra pode-se dizer que

- Não há indícios de diferença estatisticamente significativa no tempo médio de recuperação entre os que tomam e os que não tomam o remédio, ou
- Há indícios de diferença estatisticamente significativa no tempo médio de recuperação entre os que tomam e os que não tomam o remédio

Qual o Teste Estatístico a Usar?

Depende de vários factores:

- Tipo de efeito que se pretende testar
- N° de variáveis envolvidas
- Nível de medição das variáveis
- Independência das observações
- Outras características dos dados (tipo de distribuição de frequências, igualdade de variâncias, etc)



Testes Paramétricos vs Testes Não-Paramétricos

Testes Paramétricos:

- **Fazem pressupostos sobre a distribuição** dos dados:
 - Exigem a normalidade em amostras pequenas ($n < 30$).
 - Nas amostras grandes ($n \geq 30$) como a distribuição da variável média amostral é assintoticamente normal pelo **Teorema do Limite central (TLC)** podem ser aplicados os Testes Paramétricos.
- Dados contínuos.

Testes Não-Paramétricos:

- **Não fazem pressupostos sobre a distribuição** dos dados:
 - São usados quando a(s) variável(is) não tem(têm) distribuição normal ou quando, apesar da(s) amostra(s) ser(em) grande(s), se opta por conclusões mais conservadoras.
- Dados nominais, ordinais, discretos ou contínuos.
- Em geral, envolvem cálculos mais simples.
- Pouco influenciados por valores extremos.
- A desvantagem destes testes é que não são tão potentes quanto os Testes Paramétricos, ou seja, podem levar a uma maior probabilidade do erro tipo II (definido num slide mais à frente).

Paramétrico

Distribuição da variável na população conhecida (ex: Normal)

Estudos anteriores com amostras grandes revelam normalidade

Amostras grandes
 $n \geq 30$

Comparo médias e/ou variâncias

Mais poderoso (*)

Não Paramétrico

Não conheço a distribuição da variável na população

Amostras pequenas

Comparo medianas e/ou distribuições

Utiliza postos (ranks)

Menos poderoso (*)

*) Poder: Habilidade do teste de detectar um efeito dado que ele realmente exista

Testes de Hipóteses em Estudo...

Testes Paramétricos

- Testes de hipóteses para um valor médio μ
- Testes de hipóteses para uma variância σ^2
- Testes de hipóteses para uma proporção populacional p
- Testes de Hipóteses para a igualdade de médias (amostras independentes)
- Testes de Hipóteses para a razão de variâncias
- Testes de Hipóteses para a igualdade de proporções
- Testes de Hipóteses para a igualdade de médias (amostras emparelhadas)

Testes Não Paramétricos

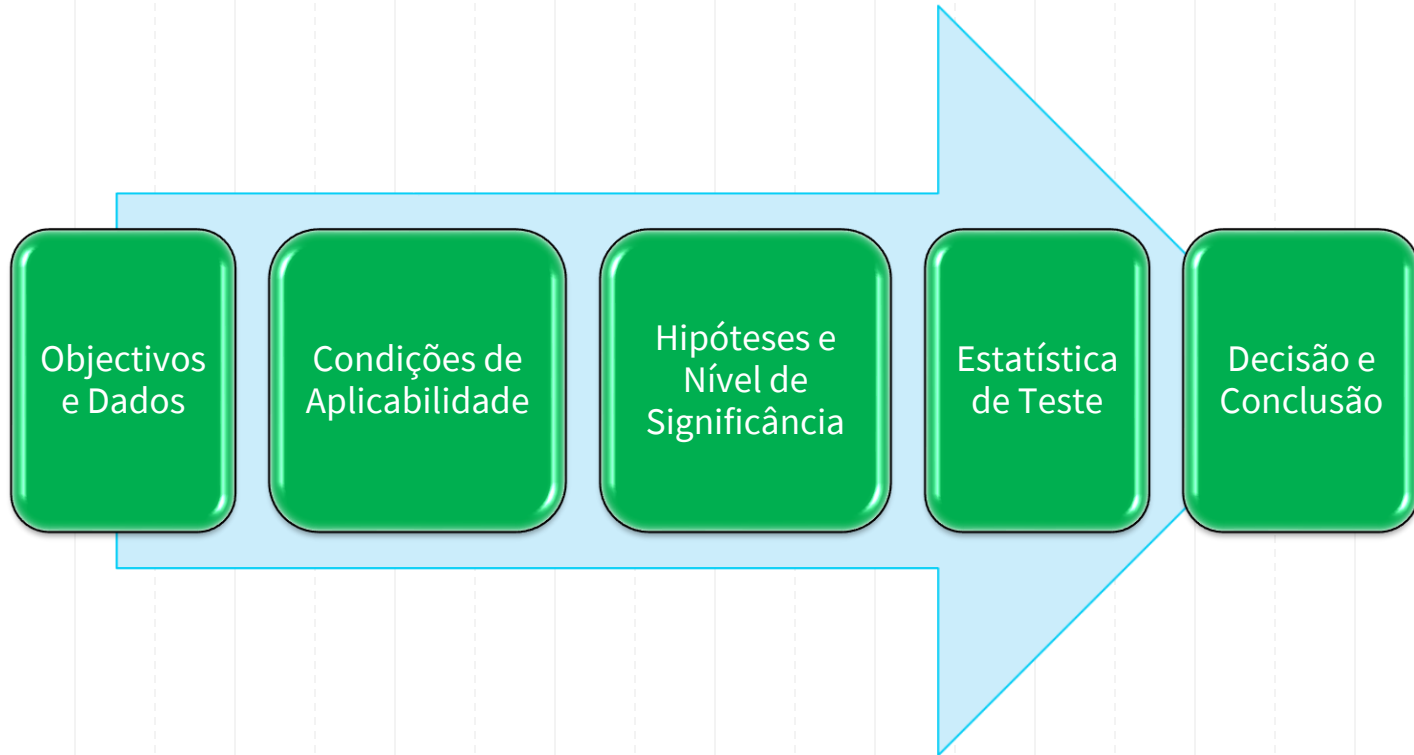
- Teste de Independência do Qui-Quadrado

Condições de Aplicabilidade de Testes Paramétricos

Normalidade

Homogenidade de
variâncias

Construção de um Teste de Hipóteses



Tipo de Hipóteses

1) $H_0: \mu = 1,70$
simples

vs. $H_1: \mu = 1,80$
simples

2) $H_0: \mu = 1,70$
simples

vs. $H_1: \mu > 1,70$
composta

3) $H_0: \mu \leq 1,70$
comp.

vs. $H_1: \mu > 1,70$
comp.

4) $H_0: \mu = 1,70$
simples

vs. $H_1: \mu \neq 1,70$
composta

Tipos de Erros vs Nível de Significância

Tipos de erros

- Erro tipo I (1ª espécie): rejeitar H_0 quando H_0 é verdadeira
- Erro tipo II (2ª espécie): não rejeitar H_0 quando H_0 é falsa

Decisão	H_0 Verdadeira	H_0 Falsa
Não rejeitar H_0	Correto $1-\alpha$	Erro tipo II β
Rejeitar H_0	Erro tipo I α	Correto $1-\beta$

Poder ou potência do teste

Definição: Chama-se potência do teste à probabilidade de rejeitar a hipótese nula quando a hipótese alternativa é verdadeira ($= 1 - \beta$).

Nível de significância ($0 \leq \alpha \leq 1$)

- Probabilidade que o investigador estabelece à priori como limite para decidir se rejeita H_0
- **Níveis usuais de significância:** 0,5%, 1%, 5% e 10%

$$\begin{aligned}\alpha &= P(\text{erro do tipo I}) = \\ &= P(\text{Rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira})\end{aligned}$$

A α chama-se nível de significância.

$$\begin{aligned}\beta &= P(\text{erro do tipo II}) = \\ &= P(\text{"Aceitar" } H_0 | H_0 \text{ é falsa})\end{aligned}$$

Decisão: Região de Rejeição vs Valor-p

Região de rejeição (RR) ou Região crítica (RC):
Conjunto para o qual H_0 é rejeitada

- Teste unilateral à esquerda: $RR =]-\infty; z_\alpha]$
- Teste unilateral à direita: $RR = [z_{1-\alpha}; +\infty[$
- Teste bilateral: $RR =]-\infty; -z_{1-\alpha/2}] \cup [z_{1-\alpha/2}; +\infty[$

Nota: Supondo que a estatística de teste tem distribuição normal.

Regra (considerando os valores críticos):

- $z_0 \leq z_\alpha \Rightarrow$ Rejeita-se H_0
- $z_0 \geq z_{1-\alpha} \Rightarrow$ Rejeita-se H_0
- $|z_0| \geq z_{1-\alpha/2} \Rightarrow$ Rejeita-se H_0

Regra: $z_0 \in RR \Rightarrow$ Rejeita-se H_0

Dimensão do teste

Valor-p ou P-value: Probabilidade sob H_0 de a estatística de teste tomar valores tão ou mais desfavoráveis a H_0 do que o seu valor observado

- Teste unilateral à esquerda: valor-p = $P(Z \leq z_0)$
- Teste unilateral à direita: valor-p = $P(Z \geq z_0)$
- Teste bilateral: valor-p = $P(Z \leq -z_0 \text{ ou } Z \geq z_0) = 2 \times P(Z \geq |z_0|)$

Regra: Valor-p $< \alpha \Rightarrow$ Rejeita-se H_0

O nível de significância α é a probabilidade de rejeitar a **hipótese nula** quando ela é verdadeira (conhecido como **erro do tipo I**).^[5] Em **testes de hipóteses** estatísticas, diz-se que há significância estatística ou que o resultado é estatisticamente significativo quando o p -valor observado é menor que o nível de significância α definido para o estudo.^{[2][3]} O nível de significância é geralmente determinado pelo pesquisador *antes* da coleta dos dados e é tradicionalmente fixado em 0,05 ou menos, dependendo da área de estudo.^{[6][7][8]} Em muitas áreas de estudo, resultados com nível de significância de 0,05 (probabilidade de erro de 5%) são considerados estatisticamente relevantes.^{[9][10][11]}

O p -valor (nível descritivo ou probabilidade de significância) é a probabilidade de se obter uma estatística de teste igual ou mais extrema que a estatística observada a partir de uma amostra aleatória de uma população quando a **hipótese nula** é verdadeira. Em outras palavras, o p -valor é o menor nível de significância para o qual se rejeita a hipótese nula. Por exemplo, a hipótese nula é rejeitada a 5% quando o p -valor é menor que 5%.^[12]

https://pt.wikipedia.org/wiki/Signific%C3%A2ncia_estat%C3%ADstica

Definição: valor- p é o menor nível de significância a partir do qual H_0 é rejeitado.



Testes de Hipóteses para μ (σ^2 Conhecida)

Hipóteses, Estatística de Teste e Decisão

2

8.4 Da produção diária de determinado fertilizante tiraram-se seis pequenas porções que se analisaram para calcular a percentagem de nitrogénio. Os resultados foram os seguintes:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \bar{x} = 5.917 \\ 6.2 & 5.7 & 5.8 & 5.8 & 6.1 & 5.9 & \end{array}$$

Sabe-se, por experiência, que o processo de análise fornece valores com distribuição que se pode considerar normal com $\sigma^2 = 0.25$.

- (a) Suportam as observações a garantia de que a percentagem esperada de nitrogénio, μ , é igual a 6% ao nível de significância de 10%?
- (b) Responda à alínea anterior usando o valor- p .



Exercício 8.4 (a): Teste de Hipóteses para μ (σ^2 Conhecida)

Passo 0 [descrição da situação]

$X =$ % de nitrogénio num fertilizante $\sim N(\mu, 0.25)$
(população normal, de valor esperado desconhecido
e de variância conhecida)

amostra de dimensão 6; $\bar{x} = 5.917$

A não esquecer: \bar{x} é a mesma coisa que $E(X)$ $E(X) = \mu$
 s^2 " " " " " $\text{Var}(X)$ $\text{Var}(X) = \sigma^2$

Exercício 8.4 (a): Teste de Hipóteses para μ (σ^2 Conhecida)

Hipóteses:

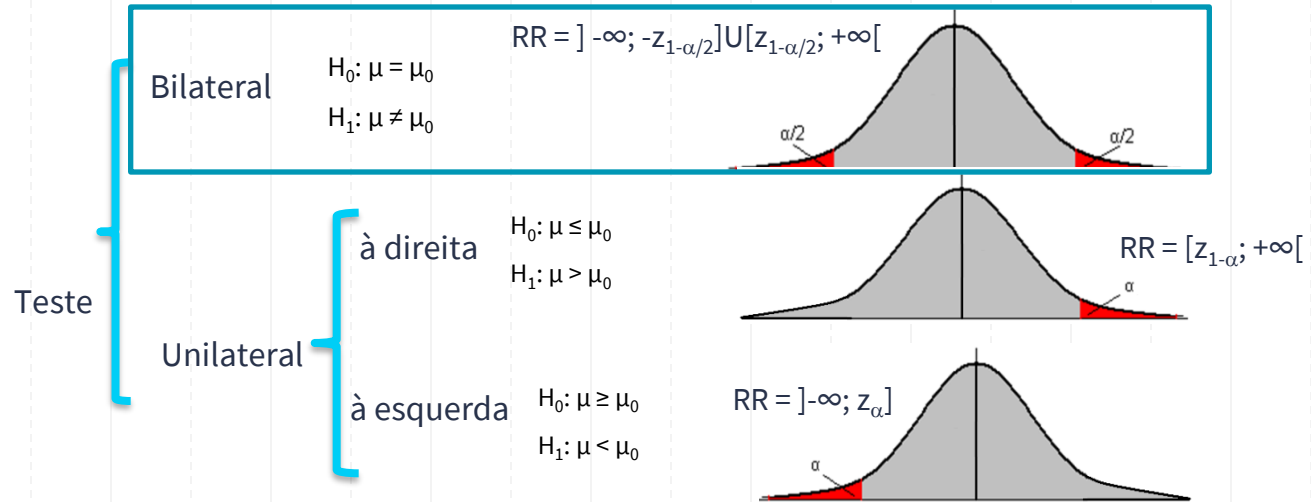
Passo 1 : Indicar quais as hipóteses que vamos testar e qual a significância

[null] $H_0: \mu = 6$ [le-se: vamos testar a hipótese H_0 i.e, se $\mu = 6$]

[alternativa] $H_L: \mu \neq 6$ [le-se: em alternativa, vamos decidir se $\mu \neq 6$]

Tipos de Testes de Hipóteses para μ (σ^2 Conhecida)

Um **teste de hipóteses paramétrico** para o parâmetro μ (valor médio ou média populacional) pode ser:



onde μ_0 é o valor numérico específico considerado em H_0 e H_1 .

Exercício 8.4 (a): Teste de Hipóteses para μ (σ^2 Conhecida)

Estadística de Teste:

Passo 2: Escolha de v. f. cond. e consequente estatística de teste.

Regras para escolha de v. f. cond. no cap. 7:

<p>I.c. p/ μ, σ conhecidos, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$</p> $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$	<p>I.c. p/ μ, σ desconhecidos, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$</p> $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$	<p>id. e n. grande</p> $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \stackrel{a}{\sim} N(0, 1)$	$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{n-1} \sum X_i \\ - \\ \frac{n}{n-1} \bar{X} \end{pmatrix}$
$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$	$\sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \stackrel{a}{\sim} \chi^2_{(k-m-1)}$			

I.c. p/ σ , com μ desconhecido, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

IC para μ : Formulário

• POPULAÇÕES NORMAIS

Média	$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\frac{\bar{X} - \mu}{S'/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$
Diferença de médias	$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0,1)$	$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1'^2}{m} + \frac{S_2'^2}{n}}} \sim t(\nu)$
	$T = \frac{\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}}{\sqrt{\frac{(m-1)S_1'^2 + (n-1)S_2'^2}{m+n-2}}} \sim t(m+n-2)$	<p>onde ν é o maior inteiro contido em r,</p> $r = \frac{\left(\frac{S_1'^2}{m} + \frac{S_2'^2}{n}\right)^2}{\frac{1}{m-1} \left(\frac{S_1'^2}{m}\right)^2 + \frac{1}{n-1} \left(\frac{S_2'^2}{n}\right)^2}$
Variância	$\frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S'^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	
Relação de variâncias	$\frac{S_1'^2}{S_2'^2} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(m-1, n-1)$	

Exercício 8.4 (a): Teste de Hipóteses para μ (σ^2 Conhecida)

Estadística de Teste:

No presente exemplo, estamos a construir um teste de hipótese para o valor esperado de uma população normal de variância conhecida.

$$V.F. \equiv Z \quad \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\text{Est. Teste} \equiv Z_0 \quad \frac{\bar{X} - 6}{\sigma/\sqrt{n}} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$$

(i.e., a estatística de teste é a variável aleatória)

Exercício 8.4 (a): Teste de Hipóteses para μ (σ^2 Conhecida)

Estadística de Teste:

depois de substituído o parâmetro em Teste
pelo valor que consta em H_0)

$$\text{valor observado: } z_0 = \frac{5.917 - 6}{\sqrt{0.25}/\sqrt{6}} = -0.41 \quad \text{N(0,1)}$$

$H_0: \mu = 6$

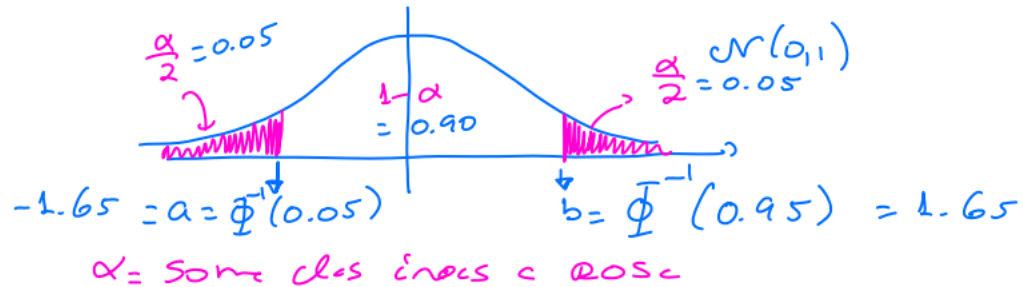
n (dimensão de amostra)

[Passo 2: dist. de $x + H_0$ + saber quais os parâmetros conhecidos]

Exercício 8.4 (a): Teste de Hipóteses para μ (σ^2 Conhecida)

Decisão (pela região de rejeição):

Passo 3 : Construção da Região de Rejeição

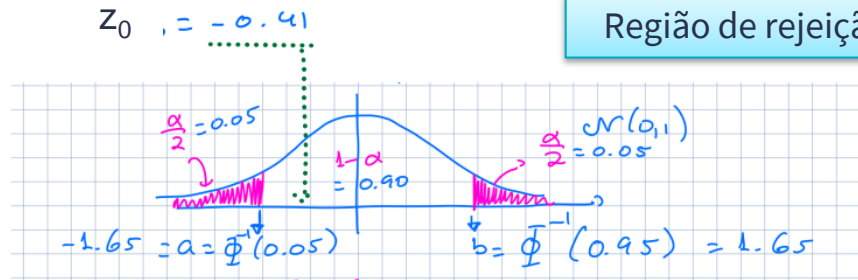


[Passo 3 = distribuição de v. fluc. + α + forma? do H_2]

Exercício 8.4 (a): Teste de Hipóteses para μ (σ^2 Conhecida)

Decisão (pela região de rejeição):

Passo 4 : Decisão sobre aceitação ou rejeição de H_0



Região de rejeição $RR =]-\infty; -1,65] \cup [1,65; +\infty[$

Decisão pela região de rejeição:

Não se rejeita H_0 para $\alpha = 10\%$, pois $-1,65 < -0,41 < 1,65$. Não existe evidência estatística para afirmar que o valor médio é diferente de 6 para $\alpha = 10\%$.

[Mariana: está bonita a aula de hoje?
aguardo Respostas!]

Então, como $-1.65 < Z_0 < 1.65$, significa que por
10% = 5% não há evidências estatísticas para rejeitar H_0

[Passo 4 = Região rejeição + t_0]

a) Sim ($-1.645 < -0.408 < 1.645$) b) Valor-p = $0.6818 > 0.1$

Exercício 8.4 (a): Teste de Hipóteses para μ (σ^2 Conhecida)

		decisão	
		Aceita H_0	Rejeita H_0
Realidade	H_0 V	O.K.	ERRO Tipo 1
	H_0 F	ERRO Tipo 2	O.K.

$$\alpha = P(\text{erro tipo 1}) = P(\text{Rejeita } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeiro})$$

(nível de significância)

(por diversas razões, damos mais relevância ao erro tipo 1)

No exemplo: $\alpha = 0.10$

[Passo 1 = $H_0 + H_1 + \alpha$]

Exercício 8.4 (a): Teste de Hipóteses para μ (σ^2 Conhecida)

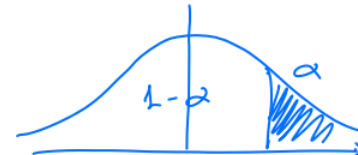
Comentário: A forma do H_1 é essencial no passo 3

$$H_0: \mu = 6$$
$$H_1: \mu \neq 6$$

$$H_0: \mu = 6$$
$$H_1: \mu < 6$$

$$H_0: \mu = 6$$
$$H_1: \mu > 6$$

Passo 0 é igual
Passo 2 é igual



$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

α é a área de zona de rejeição!

Exercício 8.4 (a): Teste t para o Valor Médio (σ^2 Conhecida)

Hipóteses

Teste Bilateral

$$H_0: \mu = 6 \text{ versus } H_1: \mu \neq 6$$

Nota: A variável média amostral tem distribuição normal, logo este teste de hipóteses é válido.

Estatística de Teste

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

Valor Observado da Estatística de Teste (VOE)

$$z_0 = -0,41$$

Regra: $z_0 \in RR \Rightarrow$ Rejeita-se H_0

Decisão

Pela região de rejeição: $z_0 = -0,41$ não pertence à região de rejeição $RR =]-\infty; -1,645] \cup [1,645; +\infty[$

Pelo valor-p: Valor-p = 0,6818 > 0,10 (ver slide a seguir)

Regra: Valor-p < $\alpha \Rightarrow$ Rejeita-se H_0

Não se rejeita-se H_0 para $\alpha = 10\%$. Não existe evidência estatística para afirmar que a percentagem esperada de nitrogénio é diferente de 6% para $\alpha = 10\%$.

Dados:

$$N = 6$$

$$\text{Média amostral} = 5,917$$

$$\sigma^2 = 0,25$$

$$\mu_0 = 6$$

$$\alpha = 0,10$$

$$z_{1-\alpha/2} = z_{0,95} = 1,645$$

?

RR =]-∞; - z_{1-α/2}] U [z_{1-α/2}; ∞[

Cálculo do Quantil da Distribuição Normal de Probabilidade 1-α/2

Nível de significância (α=0,1)
Nível de confiança (1-α=0,90)

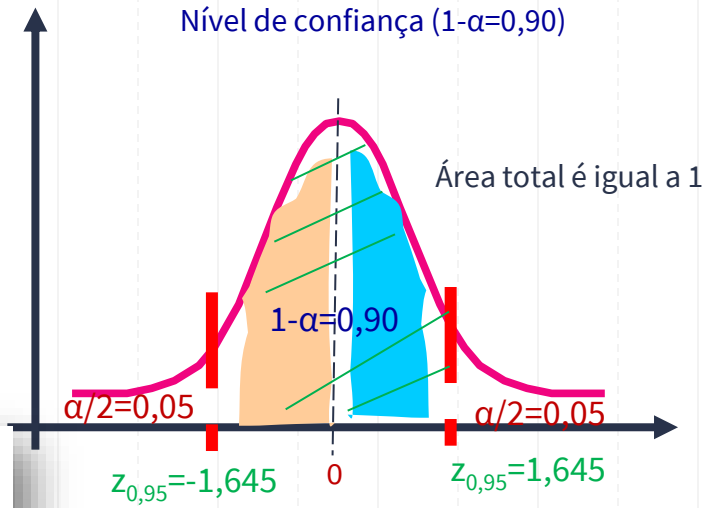


TABELA 5 – DISTRIBUIÇÃO NORMAL: Φ⁻¹(z)

ε	.0005	.0010	.0050	.0100	.0200	.0250	.0500	.1000	.2000	.3000	.4000
z _ε	3.290	3.090	2.576	2.326	2.054	1.960	1.645	1.282	.842	.524	.253
z _{ε/2}	3.481	3.290	2.807	2.576	2.326	2.241	1.960	1.645	1.282	1.036	.842

z_ε : P(Z > z_ε) = ε ; z_{ε/2} : P(|Z| > z_{ε/2}) = ε.

O nível de significância é igual a α = 0,10, então tem-se z_{1-α/2} = z_{0,95} = 1,645

Teste bilateral: valor-p = $P(Z \leq -z_0 \text{ ou } Z \geq z_0) = P(Z \leq -z_0) + P(Z \geq z_0) = 2 \times P(Z \geq |z_0|)$

Exercício 8.4 (b): Valor-p quando a Estatística de Teste tem Distribuição Normal Padrão

Área total é igual a 1

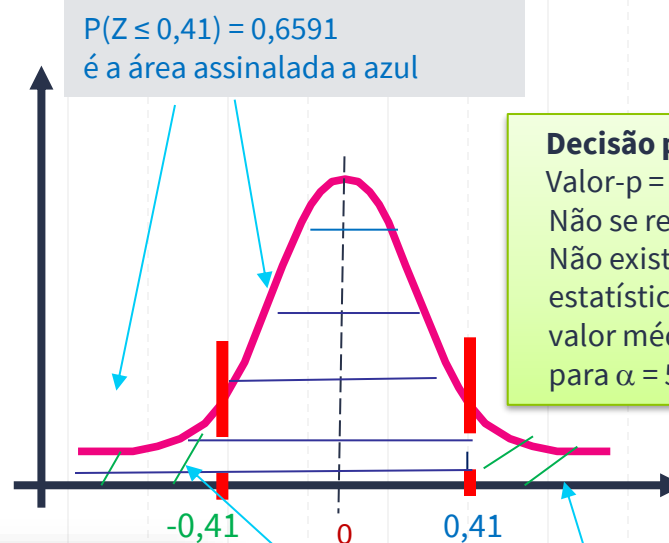
Decisão (pelo p-value):

$$\begin{aligned} \text{valor-p} &= P(Z \leq -0,41 \text{ ou } Z \geq 0,41) \\ &= 2 \times P(Z \geq 0,41) = 2 \times [1 - P(Z < 0,41)] \end{aligned}$$

A tabela geral só permite obter probabilidades de quantis positivos e do tipo $P(Z \leq z)$.

Então, tem-se
 $P(Z \leq 0,41) = 0,6591$, logo

$$\text{valor-p} = 2 \times [1 - P(Z \leq 0,41)] \sim 2 \times [1 - 0,6591] = 0,6818$$



$P(Z \leq 0,41) = 0,6591$
 é a área assinalada a azul

Decisão pelo valor-p:
 Valor-p = $0,6818 > 0,10$
 Não se rejeita H_0 para $\alpha = 10\%$.
 Não existe evidência estatística para afirmar que o valor médio é diferente de 6 para $\alpha = 5\%$.

$P(Z \leq -0,41) = 1 - P(Z \leq 0,41) = P(Z \geq 0,41) = 0,3409$
 é a área assinalada a verde

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879

a) Sim $(-1.645 < -0.408 < 1.645)$

b) Valor-p = $0.6818 > 0.1$

1. Para cada uma das proposições seguintes refira se se trata ou não de uma hipótese estatística:
- a) $\mu = 3$;
 - b) $\bar{x} = 4$;
 - c) $P(X < 2.5) = 0.4$;
 - d) $2 < \sigma < 3$;
 - e) $\bar{X} < 3$.



Exercício 1

Considere-se uma população com função de distribuição F. Uma hipótese estatística é uma conjetura sobre aspectos desconhecidos de F.

Para cada uma das proposições seguintes refira se se trata ou não de uma hipótese estatística:

- a) $\mu = 3$; *Sim*
- b) $\bar{x} = 4$; *Não*
- c) $P(X < 2.5) = 0.4$; *Sim*
- d) $2 < \sigma < 3$; *Sim*
- e) $\bar{X} < 3$. *Não*

- μ e σ são parâmetros de $F_X(x | \mu, \sigma)$
- $P(X < 2.5) = F_X(2.5)$

14. Um comerciante recebe ovos de um determinado aviário, onde os ovos são classificados, consoante o peso, em duas classes, A e B . O peso dos ovos da classe A tem distribuição normal de média 50 gramas e desvio padrão 6 gramas, enquanto o peso dos ovos da classe B tem distribuição normal de média 55 gramas e desvio padrão idêntico ao da classe A . O comerciante acaba de receber uma remessa de ovos com garantia de serem da classe B e tem um prazo de 2 dias para reclamar, caso considere ter havido engano da parte do aviário. Considere $H_0 : \mu = 55$ contra $H_1 : \mu = 50$.
- Tal como o teste foi definido, pode afirmar-se que o aviário tem o benefício da dúvida?
 - Para tomar uma decisão, o comerciante analisou uma amostra de uma dúzia de ovos cujo peso total foi de 630 gramas. Qual a atitude que o comerciante deve tomar? (utilize a dimensão de 0.05 como referência, e de 0.10 para comparação).
 - Determine a probabilidade do erro de 2.^a espécie. Qual o seu significado?
 - Se pretender que a probabilidade do erro de 2.^a espécie seja idêntica à do de 1.^a espécie (0.05), qual deve ser a dimensão da amostra a considerar?

Nota: Nesta questão, pretende-se determinar o p-value.



Exercício 14 a)

Ex 14

terça-feira, 15 de fevereiro de 2022 00:09

$X \equiv \text{Peso de um ovo (em gramas)} \sim N(\mu, 6^2)$

$H_0: \mu = 55 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu = 50$

- a) Sim. De acordo com a hipótese nula, que é aquela em que se acredita até prova (recolha de evidência estatística) em contrário, o peso dos ovos tem uma média de 55 gramas, que é o peso indicado pelo aviário para os ovos de classe B.

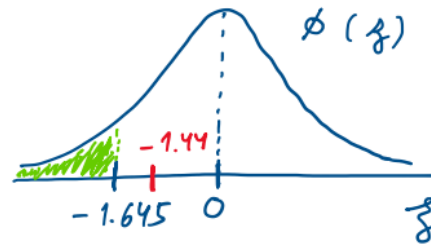
Exercício 14 b)

b) Amostra de $n = 12$ ovos

$$\sum_{i=1}^{12} x_i = 630 \quad \bar{x} = \frac{630}{12} = 52.5$$

População normal (média):

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$



Estatística do teste (sob H_0 verdadeira):

$$Z = \frac{\bar{X} - 55}{6 / \sqrt{12}} \sim N(0, 1)$$

Exercício 14 b)

$$W_{0.05} = \left\{ \begin{array}{l} \text{se } z_{obs} < -z_{0.05} = -1.645 \end{array} \right\}$$

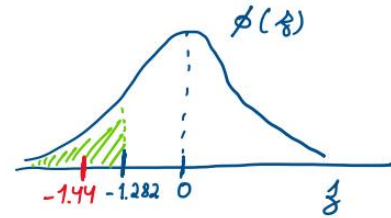
$$z_{obs} = \frac{\bar{x} - 55}{6 / \sqrt{12}} = \frac{52.5 - 55}{6 / \sqrt{12}} = -1.44 \quad W_{0.05} \text{ logo não se rejeita } H_0.$$

Ao basear-se num teste estatístico de dimensão 0.05, o comerciante deve confiar na garantia do aviário, e não reclamar, uma vez que a evidência estatística presente na amostra recolhida confere suporte à hipótese nula, de acordo com a qual o peso médio dos ovos é condicente com a classe B.

$$W_{0.1} = \left\{ \begin{array}{l} \text{se } z_{obs} < -z_{0.1} = -1.282 \end{array} \right\}$$

$$z_{obs} = -1.44 \in W_{0.1} \text{ logo rejeita-se } H_0.$$

Com uma dimensão de teste de 0.1 a conclusão seria contrária.



Exercício 14 c)

c) Com $\alpha = 0.05$ (a dimensão de referência) temos:

$$1 - \beta = P(\text{não rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}) =$$

$$= P(\overset{\text{E.T. sob } H_0 \text{ verdadeira}}{Z} > -1.645 \mid \mu = 50) =$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - 55}{6/\sqrt{12}} > -1.645 \mid \mu = 50\right) =$$

$$= P\left(\bar{X} > 55 - 1.645 \times \frac{6}{\sqrt{12}} \mid \mu = 50\right) =$$

$$= P\left(\underbrace{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}_{\downarrow Z \sim N(0,1)} > \frac{55 - 1.645 \times \frac{6}{\sqrt{12}} - 50}{6/\sqrt{12}}\right) =$$

$$= 1 - \Phi(1.241751) \approx 1 - \Phi(1.24) = 1 - 0.8925 =$$

\downarrow
Tabela 4

$$= 0.1075$$

Exercício 14 c)

Esta é a probabilidade de, baseado no teste proposto, se concluir erradamente com base numa amostra recolhida que os ovos pertencem à classe B, ou seja, a probabilidade de não se rejeitar H_0 quando esta é falsa.

Com $\alpha = 0.1$ teríamos:

$$\begin{aligned} 1 - \beta &= P(\underbrace{Z}_{\text{E.T. sob } H_0 \text{ verdadeira}} > -1.282 \mid \mu = 50) = \\ &= P\left(\frac{\bar{X} - 55}{6/\sqrt{12}} > -1.282 \mid \mu = 50\right) = \\ &= P\left(\bar{X} > 55 - 1.282 \times \frac{6}{\sqrt{12}} \mid \mu = 50\right) = \\ &= P\left(\underbrace{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}_{Z \sim N(0,1)} > \frac{55 - 1.282 \times \frac{6}{\sqrt{12}} - 50}{6/\sqrt{12}}\right) = \end{aligned}$$

$$= 1 - \Phi(1.6) \approx 1 - \Phi(1.6) = 1 - 0.9452 = 0.0548$$

Exercício 14 d)

$Z \sim N(0, 1)$

d) $1 - \beta = \alpha = 0.05$

Prob. erro tipo 2 (pointing to $1 - \beta$)
Prob. erro tipo 1 (pointing to α)

E.T. sob H_0 verdadeira (pointing to the Z in the next equation)

$$1 - \beta = 0.05 = P(Z > -1.645 \mid \mu = 50) =$$

valor crítico para $\alpha = 0.05$ (pointing to -1.645)

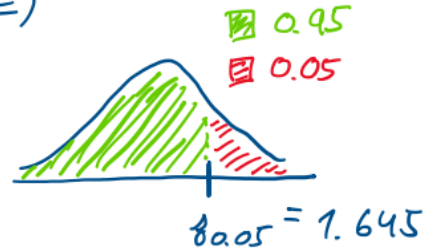
$$= P\left(\frac{\bar{X} - 55}{6/\sqrt{m}} > -1.645 \mid \mu = 50\right) =$$
$$= P\left(\bar{X} > 55 - 1.645 \times \frac{6}{\sqrt{m}} \mid \mu = 50\right) =$$
$$= P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{6/\sqrt{m}} > \frac{55 - \frac{9.87}{\sqrt{m}} - 50}{6/\sqrt{m}}\right) =$$
$$= P\left(Z > \frac{(5 - \frac{9.87}{\sqrt{m}})\sqrt{m}}{6}\right) =$$
$$= P\left(Z > \frac{5}{6}\sqrt{m} - \frac{9.87}{6}\right) =$$

Exercício 14 d)

$$\begin{aligned} &= P\left(z > \frac{5}{6} \sqrt{n} - 1.645\right) = \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{5}{6} \sqrt{n} - 1.645\right) \quad (\Rightarrow) \end{aligned}$$

$$) 0.05 - 1 = - \Phi\left(\frac{5}{6} \sqrt{n} - 1.645\right) \quad (\Rightarrow)$$

$$) 0.95 = \Phi\left(\underbrace{\frac{5}{6} \sqrt{n} - 1.645}_{z_{0.05}}\right)$$



$$\frac{5}{6} \sqrt{n} - 1.645 = 1.645 \quad (\Rightarrow)$$

$$(\Rightarrow) \quad n = \left(\frac{6}{5} \times 2 \times 1.645\right)^2 = 15.5867 \approx 16$$

16. Seja X uma variável aleatória que representa a quantidade de vinho existente numa garrafa de 75 centilitros. Admita que X tem distribuição normal com desvio padrão igual a 2. Para testar $H_0 : \mu = 75$ contra $H_1 : \mu < 75$ seleccionou-se uma amostra casual de 10 garrafas, rejeitando-se a hipótese nula se $\bar{x} < 74.1$, onde \bar{x} é a quantidade média de vinho, por garrafa, na amostra observada.
- Calcule a dimensão deste teste.
 - Determine a função potência, e calcule o seu valor quando $\mu = 74$ e $\mu = 72.5$.

Nota: Nesta questão, pretende-se determinar o p-value.



Exercício 16 a)

$X \equiv$ Vinho numa garrafa de 75 cl (em cl)

$X \sim N(\mu, 2^2)$ $n = 10$ garrafas (amostra casual)

$$W_{\bar{X}} = \{ \bar{X} : \bar{X} < 74.1 \}$$

$H_0: \mu = 75$ vs $H_1: \mu < 75$

$$a) Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

$$\alpha = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira}) =$$

$$= P(\bar{X} < 74.1 \mid \mu = 75) =$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{74.1 - 75}{2/\sqrt{10}}\right) \approx P(Z < -1.42) =$$

$$= \Phi(-1.42) = 1 - \Phi(1.42) = 1 - 0.9222 = 0.0778$$

Nota: para obter o valor igual às soluções basta calcular o valor crítico de forma "exata", ou seja, recorrendo a software em vez de tabelas, e arredondar só no último passo.

Exercício 16 b)

b)

$$\begin{aligned}\beta(\mu) &= P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}) = \\ &= P(\bar{X} < 74.1 \mid \mu) = P\left(Z < \frac{74.1 - \mu}{2/\sqrt{10}} \mid \mu\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{74.1 - \mu}{2/\sqrt{10}}\right)\end{aligned}$$

$$\mu = 74 \Rightarrow \beta(\mu) = \Phi\left(\frac{74.1 - 74}{2/\sqrt{10}}\right) \approx \Phi(0.16) = 0.5636$$

$$\mu = 72.5 \Rightarrow \beta(\mu) = \Phi\left(\frac{74.1 - 72.5}{2/\sqrt{10}}\right) \approx \Phi(2.53) = 0.9943$$

Nota: para obter o valor igual às soluções basta calcular o valor crítico de forma "exata", ou seja, recorrendo a software em vez de tabelas, e arredondar só no último passo.



Testes de Hipóteses para μ (σ^2 Desconhecida)

Hipóteses Compostas, Estatística de Teste e Decisão

3

8.6 Seja X uma variável aleatória com distribuição normal de valor esperado μ e desvio padrão σ . A partir de uma amostra de dimensão 30 dessa variável obtiveram-se os seguintes resultados:

$$\sum_{i=1}^{30} x_i = 64.0 \quad \sum_{i=1}^{30} (x_i - \bar{x})^2 = 84.8$$

Teste ao nível de significância de 5% a hipótese $H_0 : \mu = 2.0$ contra a hipótese alternativa $H_1 : \mu > 2.0$.



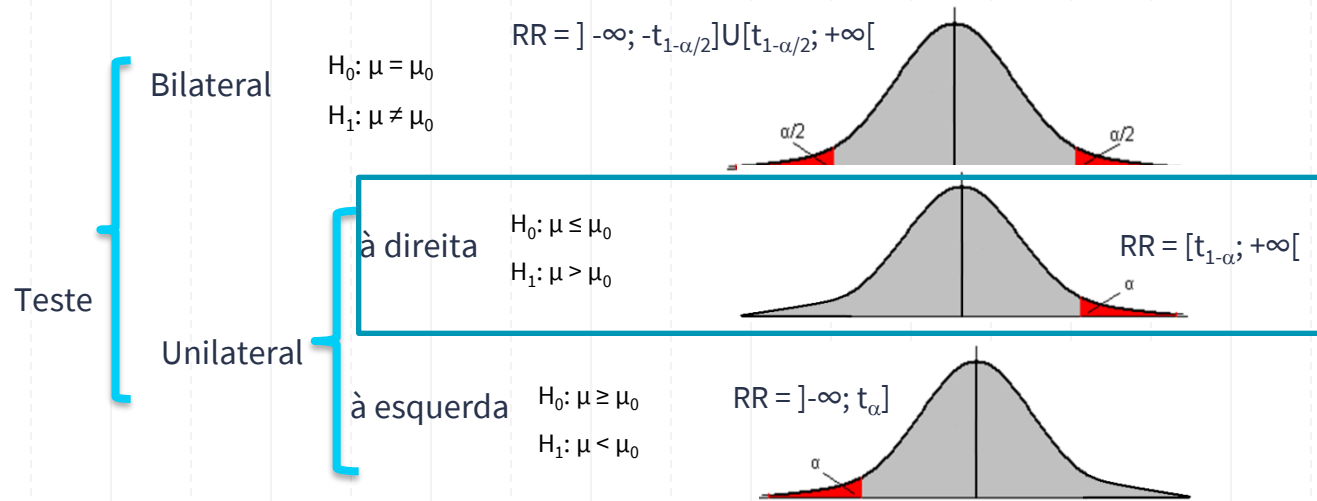
Exercício 8.6: Teste de Hipóteses para μ (σ^2 Desconhecida)

Hipóteses:

Pessoa 0,1 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ $\mu, \sigma^2 = ?$
 $H_0: \mu = 2.0$
 $H_1: \mu > 2.0$
 $\alpha = 5\%$

Tipos de Testes de Hipóteses para μ (σ^2 Desconhecida)

Um teste de hipóteses paramétrico para o parâmetro μ (valor médio ou média populacional) pode ser:



onde μ_0 é o valor numérico específico considerado em H_0 e H_1 .

Exercício 8.6: Teste de Hipóteses para μ (σ^2 Desconhecida)

Estatística de Teste:

Passo 2: v. flual e est. teste

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{(29)}$$

$$T_0 = \frac{\bar{X} - 2}{S/\sqrt{30}} \stackrel{H_0}{\sim} t_{(29)}$$

$$t_0 = \frac{2.13 - 2}{\sqrt{2.92/30}} = 0.417$$

$$\sum_{i=1}^{30} x_i = 64.0 \quad \sum_{i=1}^{30} (x_i - \bar{x})^2 = 84.8$$

$$\bar{x} = \frac{64}{30} = 2.13$$

$$s^2 = \frac{84.8}{29} = 2.92$$

IC para μ : Formulário

Variância corrigida

$$S'^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

• POPULAÇÕES NORMAIS

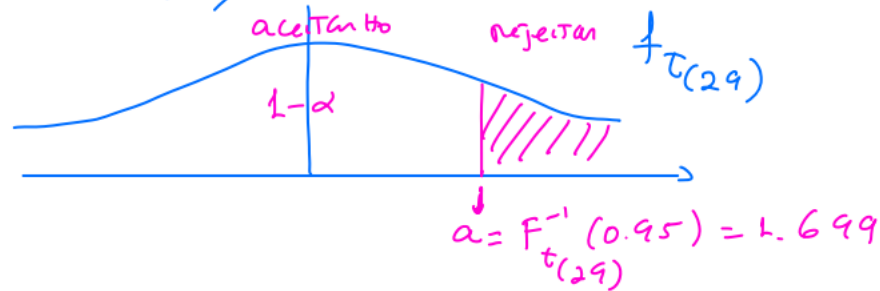
Média	$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\frac{X - \mu}{S'/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$
Diferença de médias	$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0,1)$	$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1'^2}{m} + \frac{S_2'^2}{n}}} \sim t(\nu)$
	$T = \frac{\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}}{\sqrt{\frac{(m-1)S_1'^2 + (n-1)S_2'^2}{m+n-2}}} \sim t(m+n-2)$	<p>onde ν é o maior inteiro contido em r,</p> $r = \frac{\left(\frac{S_1'^2}{m} + \frac{S_2'^2}{n}\right)^2}{\frac{1}{m-1} \left(\frac{S_1'^2}{m}\right)^2 + \frac{1}{n-1} \left(\frac{S_2'^2}{n}\right)^2}$
Variância	$\frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S'^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	
Relação de variâncias	$\frac{S_1'^2}{S_2'^2} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(m-1, n-1)$	

Exercício 8.6: Teste de Hipóteses para μ (σ^2 Desconhecida)

Decisão (pela região de rejeição):

Região de rejeição RR = $[1,699; +\infty[$

Passo 3: R. aceita



Passo 4: Decisão $t_0 = 0.417 < 1.699$, e \rightarrow não há evidências para rejeitar H_0 para $\alpha = 5\%$.

Decisão pela região de rejeição:

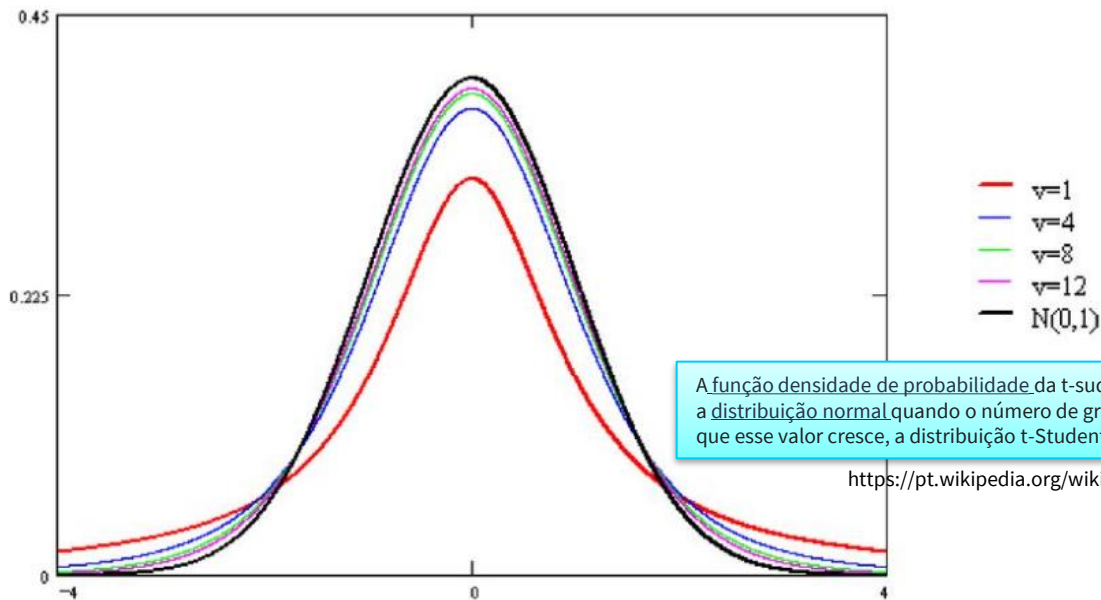
Não se rejeita H_0 para $\alpha = 5\%$, pois $0,417 < 1,699$.
Não existe evidência estatística para afirmar que o valor médio é superior a 2 para $\alpha = 5\%$.

Não se rejeita H_0 ($0.427 < 1.699$)

T-Student

Curiosidade

- Se a **variável tem distribuição Normal na população**, ou a amostra é suficientemente grande, mas não conhecemos o desvio da população, só da amostra, então ...
- ... A média amostral se distribui conforme uma **t-Student**
- ... A distribuição t-Student depende dos graus de liberdade ($n-1$), que denotamos por ν



A função densidade de probabilidade da t-Student detém caudas mais pesadas que a distribuição normal quando o número de graus de liberdade é pequeno e à medida que esse valor cresce, a distribuição t-Student aproxima-se da normal.

https://pt.wikipedia.org/wiki/Distribui%C3%A7%C3%A3o_t_de_Student

Decisão: Região de Rejeição vs Valor-p

Região de rejeição (RR) ou Região crítica (RC):
Conjunto para o qual H_0 é rejeitada

- Teste unilateral à esquerda: $RR =]-\infty; t_\alpha]$
- Teste unilateral à direita: $RR = [t_{1-\alpha}; +\infty[$
- Teste bilateral: $RR =]-\infty; -t_{1-\alpha/2}] \cup [t_{1-\alpha/2}; +\infty[$



Nota: Supondo que a estatística de teste tem distribuição t-student.

Regra (considerando os valores críticos):

- $t_0 \leq t_\alpha \Rightarrow$ Rejeita-se H_0
- $t_0 \geq t_{1-\alpha} \Rightarrow$ Rejeita-se H_0
- $|t_0| \geq t_{1-\alpha/2} \Rightarrow$ Rejeita-se H_0

Regra: $t_0 \in RR \Rightarrow$ Rejeita-se H_0

Valor-p ou P-value: Probabilidade sob H_0 de a estatística de teste tomar valores tão ou mais desfavoráveis a H_0 do que o seu valor observado

- Teste unilateral à esquerda: $\text{valor-p} = P(T \leq t_0)$
- Teste unilateral à direita: $\text{valor-p} = P(T \geq t_0)$
- Teste bilateral: $\text{valor-p} = P(T \leq -t_0 \text{ ou } T \geq t_0) = 2 \times P(T \geq |t_0|)$

Regra: $\text{Valor-p} < \alpha \Rightarrow$ Rejeita-se H_0

?

$$RR = [t_{1-\alpha}; +\infty[$$

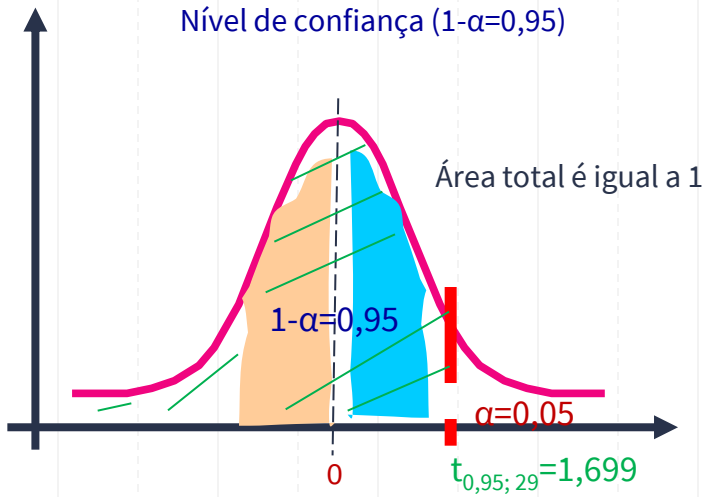
Cálculo do Quantil da Distribuição t-student de Probabilidade $1-\alpha/2$ e com $n-1$ g.l.'s

$$t_{n,\varepsilon} : P(X > t_{n,\varepsilon}) = \varepsilon$$

ε	.400	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
n								
1	.325	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656	318,289
2	.289	.816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,328
3	.277	.765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,214
4	.271	.741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173
5	.267	.727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,894
6	.265	.718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
7	.263	.711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785
8	.262	.706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501
9	.261	.703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297
10	.260	.700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144
11	.260	.697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025
12	.259	.695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930
13	.259	.694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852
14	.258	.692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787
15	.258	.691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733
16	.258	.690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686
17	.257	.689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646
18	.257	.688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610
19	.257	.688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579
20	.257	.687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552
21	.257	.686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527
22	.256	.686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505
23	.256	.685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485
24	.256	.685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467
25	.256	.684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450
26	.256	.684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435
27	.256	.684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421
28	.256	.683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408
29	.256	.683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396
30	.256	.683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385

Nível de significância ($\alpha=0,05$)

Nível de confiança ($1-\alpha=0,95$)



O nível de significância é igual a $\alpha = 0,05$ e $n-1 = 29$ g.l.'s, então tem-se $t_{1-\alpha; n-1} = t_{0,95; 29} = 1,699$

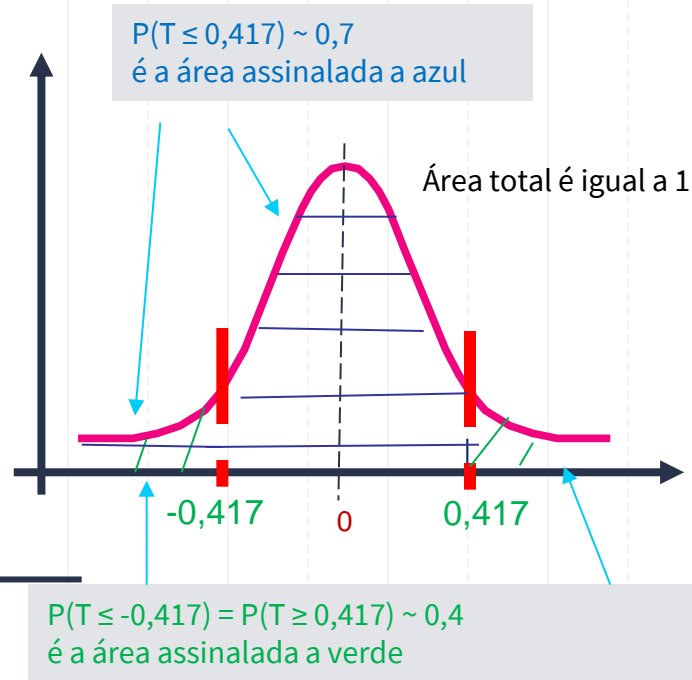
Teste unilateral à direita: valor-p = $P(T \geq t_0)$

Cálculo do valor-p quando a Estatística de Teste tem Distribuição t-student com n-1 g.l.'s

Decisão (pelo valor-p):

$$\text{valor-p} = P(T \geq 0,417) \sim P(T \geq 0,256) = 0,4$$

Decisão pelo valor-p: Valor-p = 0,4 > 0,05
Não se rejeita H_0 para $\alpha = 5\%$. Não existe evidência estatística para afirmar que o valor médio é superior a 2 para $\alpha = 5\%$.



24. Determinado produtor de vinho garante às autoridades de fiscalização que o seu vinho tem um teor médio de acidez que não ultrapassa 0.5 g/l. Supõe-se que o teor de acidez é uma variável aleatória com distribuição normal de parâmetros desconhecidos.
- Com base numa amostra de dimensão n , formalize um teste estatístico que permita analisar a veracidade da afirmação do produtor.
 - Observada uma amostra de 20 garrafas, obteve-se uma média de 0.7 g/l e um desvio padrão corrigido de 0.08. Deverão as autoridades de fiscalização actuar sobre o produtor? Justifique a resposta por meio de um teste adequado.



Exercício 24 a)

$X \equiv$ teor de acidez do vinho (em g/l)

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

a) Amostra: (X_1, \dots, X_n)

Testar $H_0: \mu \leq 0.5$ contra $H_1: \mu > 0.5$ é equivalente a testar:

$$H_0: \mu = 0.5 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu > 0.5$$

Dimensão do teste: $\alpha = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira})$

Variável fatorial (População normal e/ σ^2 desconhecido):

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S' / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$$



Exercício 24 a)

Variável fatorial (População normal e σ^2 desconhecido) :

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S' / \sqrt{m}} \sim t(m-1)$$

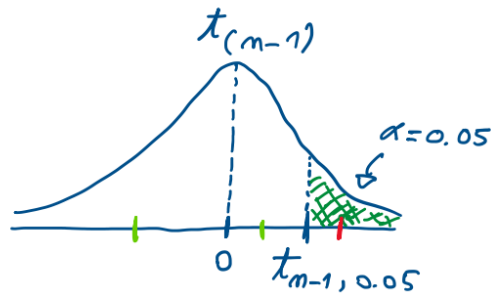
Estatística-teste (sob H_0):

$$T = \frac{\bar{X} - 0.5}{S' / \sqrt{m}} \sim t(m-1)$$

$$t_{obs} = \frac{\bar{x} - 0.5}{s' / \sqrt{m}}$$

Região crítica: $W_T = \{t_{obs} : t_{obs} > t_{m-1, \alpha}\}$

- rejeita-se H_0 se $t_{obs} \in W_T$.
- não se rejeita H_0 se $t_{obs} \notin W_T$.



Exercício 24 a)

Nota:

$$t_{\text{obs}} > t_{m-1, \alpha} \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{\bar{x} - \mu_0}{s'/\sqrt{m}} > t_{m-1, \alpha} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \bar{x} > \mu_0 + t_{m-1, \alpha} \cdot \frac{s'}{\sqrt{m}}$$

Assim sendo, outra possível região crítica é:

$$W_{\bar{x}} = \left\{ \bar{x} : \bar{x} > \mu_0 + t_{m-1, \alpha} \frac{s'}{\sqrt{m}} \right\} =$$

$$= \left\{ \bar{x} : \bar{x} > 0.5 + t_{m-1, \alpha} \frac{s'}{\sqrt{m}} \right\}$$

- rejeita-se H_0 se $\bar{x} \in W_{\bar{x}}$.
- não se rejeita H_0 se $\bar{x} \notin W_{\bar{x}}$.

Exercício 24 b)

$$\begin{aligned} b) \quad m &= 20 & \bar{x} &= 0.7 \\ \alpha &= 0.05 & s' &= 0.08 & t_{19, 0.05} &= 1.729 \end{aligned}$$

$$W_T = \{ t : t > t_{19, 0.05} \} = \{ t : t > 1.729 \}$$

$$t_{obs} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s' / \sqrt{m}} = \frac{0.7 - 0.5}{0.08 / \sqrt{20}} = 11.18$$

$t_{obs} \in W_T \rightarrow$ Rejeita-se H_0 .

Conclusão: As autoridades devem fiscalizar o produtor.

Exercício 24 b)

Resolução alternativa:

$$\begin{aligned}W_{\bar{x}} &= \left\{ \bar{x} : \bar{x} > 0.5 + t_{19, 0.05} \frac{0.08}{\sqrt{20}} \right\} = \\ &= \left\{ \bar{x} : \bar{x} > 0.5309 \right\}\end{aligned}$$

$\bar{x} = 0.7 \in W_{\bar{x}} \rightarrow$ Rejeita-se H_0 .



Testes de Hipóteses para μ : Resumo...

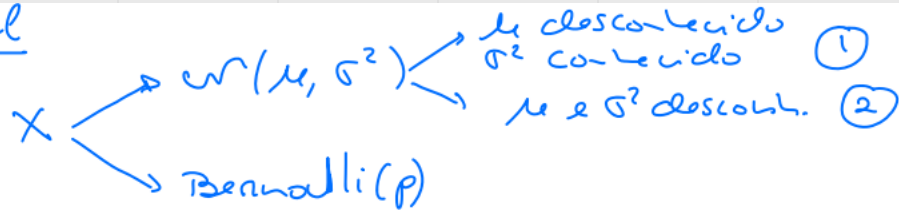
Hipóteses, Estatística de Teste e Decisão

4

Passos Fundamentais para a Construção de um Teste de Hipóteses

Método Geral

Passo 0



Passo 1

Indicar H_0 e H_1 e nível de significância α
 $\theta =$ parâmetro a testar (μ, σ ou p ,
consoante o caso)

$$\textcircled{a} \left\{ \begin{array}{l} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta \neq \theta_0 \end{array} \right.$$

$$\textcircled{b} \left\{ \begin{array}{l} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta < \theta_0 \end{array} \right.$$

$$\textcircled{c} \left\{ \begin{array}{l} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta > \theta_0 \end{array} \right.$$

Passos Fundamentais para a Construção de um Teste de Hipóteses

Passo 2

Com a informação do passo 0, vamos indicar a v. f. / estatística de teste (mesmos critérios que damos p/ os níveis de confiança)

① $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	②, p/ μ $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$	$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \approx N(0,1)$	$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$
③, p/ σ^2 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$		$\sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \approx \chi^2_{(k-m-1)}$	

Passos Fundamentais para a Construção de um Teste de Hipóteses

Passo 3

Com o nível de significância α e a forma da região de rejeição (a, b ou c), vamos construir a região de rejeição, usando a distribuição de v -funcional

a) \rightarrow zona de rejeição bilateral

b) \rightarrow zona de rejeição unilateral, à esquerda

c) \rightarrow zona de rejeição unilateral, à direita

De qq forma $\alpha = \text{área da zona de rejeição}$

Passos Fundamentais para a Construção de um Teste de Hipóteses

Passo 4 Verifica se o valor observado da estatística de teste está ou não na região de rejeição.

Construção de um Teste de Hipóteses: Exemplo 1

Hipóteses:

① $X \sim \mathcal{N}(\mu, 2^2)$
passo 0 $| n=4 ; \alpha=5\% ; \bar{x}=6$

passo 1 $| H_0: \mu = 5$
 $H_1: \mu \neq 5$

Estatística de Teste:

v. f. test $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ (padrão)

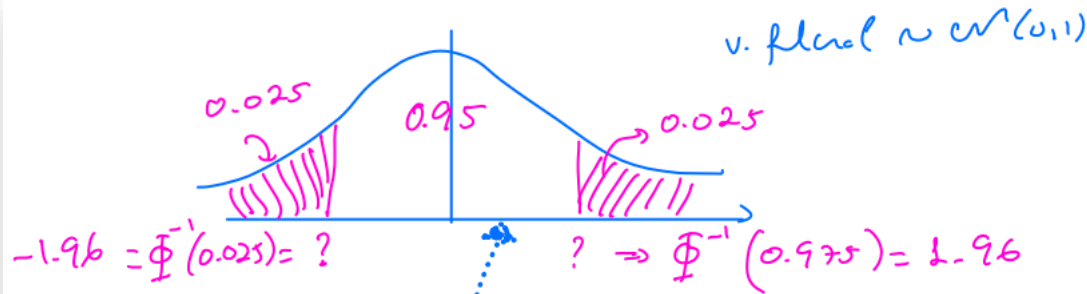
passo 2 $|$ EST. Teste $Z_0 = \frac{\bar{x} - 5}{\sigma/\sqrt{n}} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$

valor obs. est teste: $Z_0 = \frac{6-5}{1} = 1$

[valor obs estatística de teste é um $n=4$ e por isso \bar{x} tem distribuição]

Construção de um Teste de Hipóteses: Exemplo 1

Decisão (pela região de rejeição):



Passo 3

$z_0 = 1$

Como $|z_0| < 1.96$, ie, t_0 \bar{n} pertence à região de não rejeição, então H_0 \bar{n} deve ser aceita.

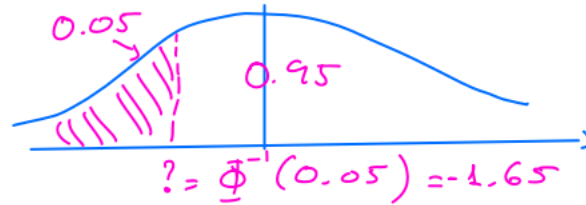
Decisão:

Não se rejeita H_0 para $\alpha = 5\%$, pois $|1| < 1.96$. Não existe evidência estatística para afirmar que o valor médio é diferente de 5 para $\alpha = 5\%$.

Construção de um Teste de Hipóteses: Exemplos 2 e 3

Hipóteses:

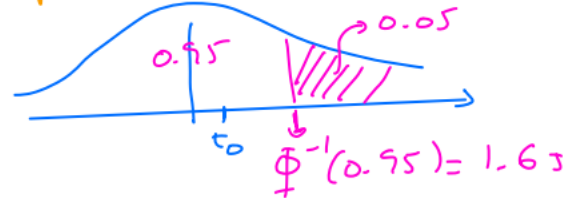
$$\begin{aligned} H_0: \mu &= 5 \\ H_1: \mu &< 5 \end{aligned}$$



Como $z_0 = 1 > -1.65$, então H_0 é aceita
Seu rejeitada p/ $\alpha = 5\%$
p/ $\forall \alpha \leq 5\%$

Hipóteses:

$$\begin{aligned} H_0: \mu &= 5 \\ H_1: \mu &> 5 \end{aligned}$$



Obrigada!

Questões?

